Réponse de systèmes du premier ordre à un échelon

Nous supposerons que e(t) est un échelon d'amplitude E :

$$e(t) = E \times u(t)$$

Nous cherchons la solution d'une équation différentielle d'ordre 1 :

$$\tau \times \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t)$$

Exemple : circuit RC avec sortie sur C. On a alors $\tau = RC$.

<u>Solution particulière (correspond au régime permanent) :</u>

Pour une réponse à un échelon, le régime permanent existe et est constant si le système est stable.

Donc $\dfrac{ds(t=+\infty)}{dt} = 0$ et $s_1(t=+\infty) = E$

<u>Solution à l'équation sans second membre (correspond au régime transitoire) :</u>

$$\tau \times \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = 0$$

$$\Rightarrow \tau \times \frac{ds(t)}{dt} = -s(t)$$
$$\Rightarrow \frac{ds(t)}{s(t)} = -\frac{dt}{\tau}$$
$$\Rightarrow \int \frac{ds(t)}{s(t)} = -\int \frac{dt}{\tau}$$

Les deux primitives sont égales à une constante additive près.

$$\Rightarrow \ln(|s(t)|) = -\frac{t}{\tau} + k$$

$$\Rightarrow |s(t)| = e^{-\frac{t}{\tau}+k} = K \times e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{avec } K = e^k$$

$$\Rightarrow s_0(t) = \pm K \times e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Le + ou – peut être intégré à la constante K.

Solution générale : c'est la somme de la solution particulière et la solution à l'équation sans second membre.

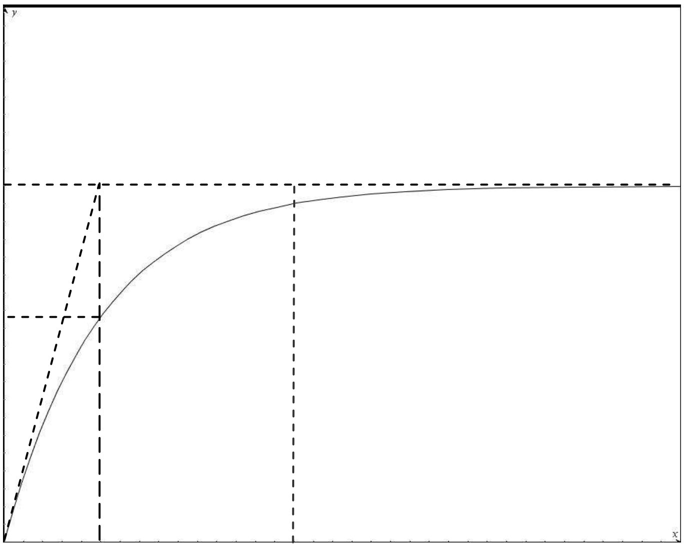
$$\Rightarrow s(t) = s_1(t) + s_0(t) = E + K \times e^{-\frac{t}{\tau}}$$

On détermine K à l'aide des conditions initiales : $s(0^+) = s(0^-) = 0$

$$\Rightarrow E + K = 0 \Rightarrow K = -E$$

Il vient :

$$s(t) = E \times \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$



A compléter…

On rencontre également souvent ce type d'équation :

$$\tau \times \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = \frac{de(t)}{dt}$$

Exemple : circuit RC avec sortie sur R.

L'équation sans second membre est identique à la précédente.

$$\Rightarrow s_0(t) = K \times e^{-\frac{t}{\tau}}$$

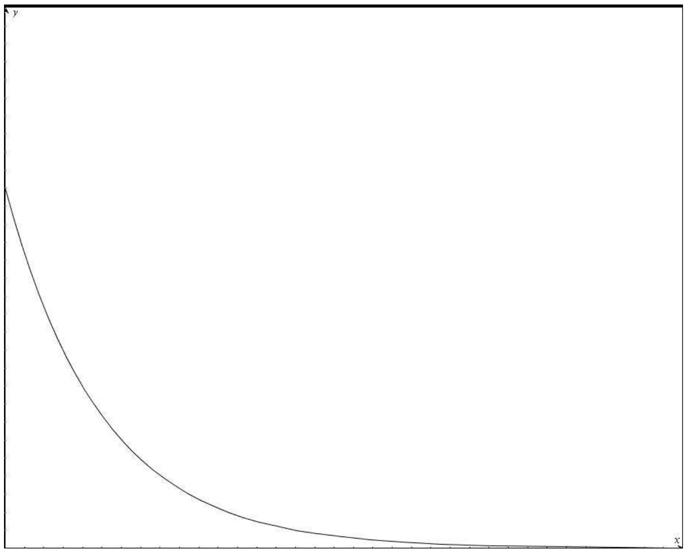
La solution particulière est nulle. En effet, en régime permanent et pour une réponse à un échelon les dérivées sont nulles. Il reste :

$$s_1(t = +\infty) = 0$$

$$\Rightarrow s(t) = K \times e^{-\frac{t}{\tau}}$$

On détermine K à l'aide des conditions initiales : $s(0^+) = e(0^+) = E$

$$s(t) = E \times e^{-\frac{t}{\tau}}$$



A compléter…(valeurs remarquables, tangente à l'origine, valeur initiale et constante de temps).

Les conditions initiales sont généralement données par les éléments du système :
*) continuité du courant dans une bobine.
*) continuité de la tension aux bornes d'un condensateur.
*) continuité de la vitesse de rotation d'un moteur, etc…